FÓRMULA GERAL DE RESOLUÇÃO

Seja a equação:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

Vamos transformá-la em equações equivalentes, de modo que o primeiro membro seja um quadrado perfeito.

1º Subtraímos c de ambos os membros: $ax^2 + bx = -c$.

2º Multiplicamos ambos os membros por $4a$ $(a \neq 0)$: $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$.

3º Adicionamos b^2 a ambos os membros: $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$.

4º Fatoramos o primeiro membro: $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$.

5º Extraímos a raiz quadrada de ambos os membros: $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$.

6º Isolando x: $= \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Esta expressão chama-se **fórmula geral** da equação do 2º grau, porque permite encontrar as raízes de qualquer equação do 2º grau, **completa** ou **incompleta**.

O número $b^2 - 4ac$ chama-se **discriminante** da equação e é representado pela letra grega Δ (delta).

Então, como:

$\Delta = b^2 - 4ac$, a fórmula fica $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Veja que:

Se $b^2 - 4ac > 0$, a equação tem duas raízes reais diferentes.
Se $b^2 - 4ac = 0$, a equação tem duas raízes reais iguais.
Se $b^2 - 4ac < 0$, a equação não tem raízes reais.

Exemplo 1:

Resolver em $\mathbf{R}$ a equação $2x^2 - 7x + 3 = 0$

Solução:

Temos:

$a = 2$, $b = 2$ e $c = 2$

Substituindo estes valores na fórmula resolutiva $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ obtemos:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x = \frac{7 \pm 5}{4} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{7+5}{4} = \dfrac{12}{4} = 3 \\[2ex] x'' = \dfrac{7-5}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Portanto, as raízes dessa equação são 3 e $\frac{1}{2}$.

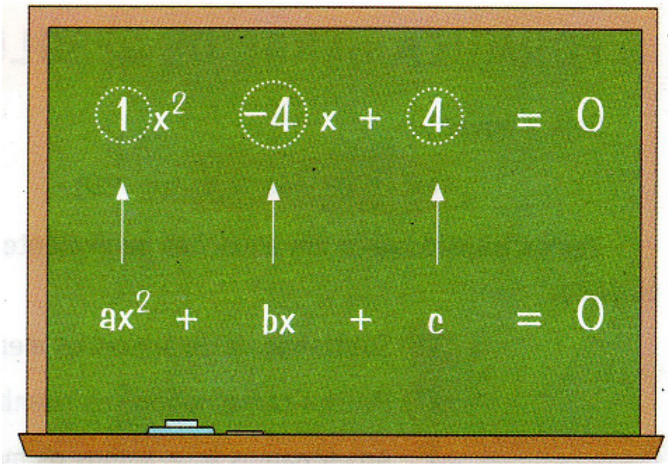
Exemplo 2:

Resolver em $\mathbf{R}$ a equação $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Solução:

Temos:

$a = 1$, $b = -4$ e $c = 4$



Substituindo estes valores na fórmula resolutiva $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ obtemos:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 0}{2} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{4+0}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\[2ex] x'' = \dfrac{4-0}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

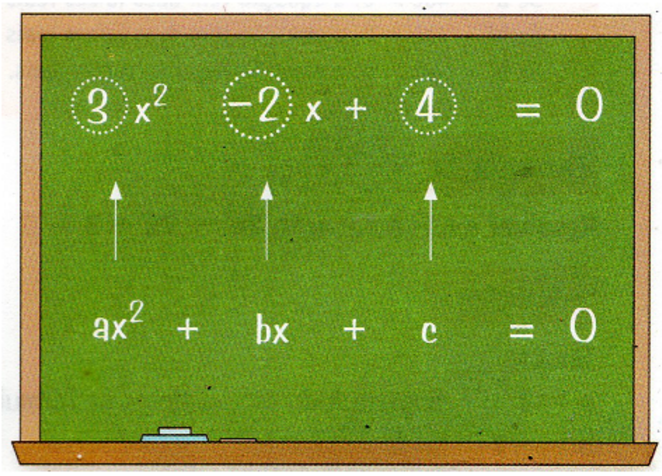
Exemplo 3:

Resolver em $\mathbf{R}$ a equação $3x^2 - 2x + 4 = 0$.

Solução:

Temos:

$a = 3$, $b = -2$ e $c = 4$



Substituindo estes valores na fórmula resolutiva $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$ obtemos:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 48}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{-44}}{6} \notin \mathbf{R}$$

$\sqrt{-44}$ não é um número real.

Em $\mathbf{R}$ não é possível extrair a raiz quadrada de um número negativo.

Assim, não há raízes reais.

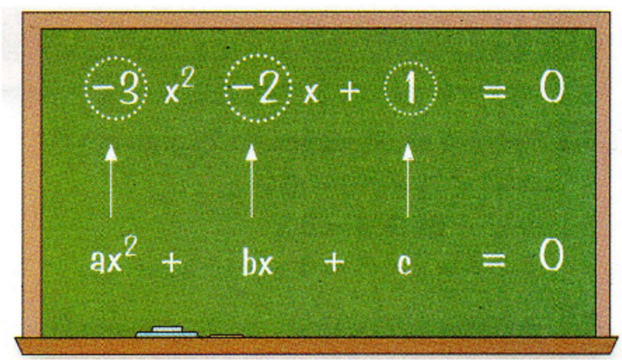
Exemplo 4:

Resolver em $\mathbf{R}$ a equação $-3x^2 - 2x + 1 = 0$.

Solução:

Temos:

$a = -3$, $b = -2$ e $c = 1$



$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 1}}{2 \cdot (-3)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-6} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{-6} \qquad x' = \frac{2 + 4}{-6} = \frac{6}{-6} = -1 \qquad x'' = \frac{2 - 4}{-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

Então, essa equação possui duas raízes: -1 e $\dfrac{1}{3}$

Note que essa mesma equação poderia ser resolvida multiplicando os dois membros da equação por -1, ou seja, $3x^2 + 2x - 1 = 0$.

Temos:

$a = 3$, $b = 2$ e $c = -1$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$$

> A equação $-3x^2 - 2x + 1 = 0$
> é equivalente à equação
> $3x^2 + 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} \qquad x' = \frac{-2 + 4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad x'' = \frac{-2 - 4}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

Duas equações **equivalentes** admitem as mesmas soluções.

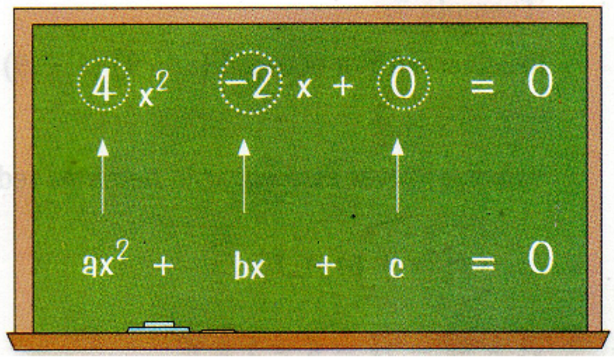
Exemplo 5:

Resolver em **R** a equação $4x^2 - 2x = 0$.

Solução:

Temos:

$a = 4$, $b = -2$ e $c = 0$



Veja! As equações incompletas também podem ser resolvidas pela fórmula geral.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 0}}{2 \cdot 4}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 0}}{8} = \frac{2 \pm \sqrt{4}}{8}$$

$$x' = \frac{2+2}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$x'' = \frac{2-2}{8} = \frac{0}{8} = 0$$

Então, essa equação possui duas raízes: $\frac{1}{2}$ e 0.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO: Fórmula geral de resolução

1. Resolva as equações do 2º grau em **R**

   (a) $x^2 - 7x + 10 = 0$
   (b) $x^2 - 6x + 9 = 0$
   (c) $2x^2 + x + 5 = 0$
   (d) $7x^2 + x + 1 = 0$
   (e) $25x^2 - 20x + 4 = 0$
   (f) $6x^2 + 5x + 1 = 0$

2. Resolva as equações do 2º grau em **R**

   (a) $3x^2 - 21x + 18 = 0$
   (b) $2x^2 - 5x - 3 = 0$
   (c) $x^2 - x - 1 = 0$
   (d) $x^2 - 5x = 0$
   (e) $-x^2 + x + 12 = 0$
   (f) $-x^2 + 16x - 64 = 0$